

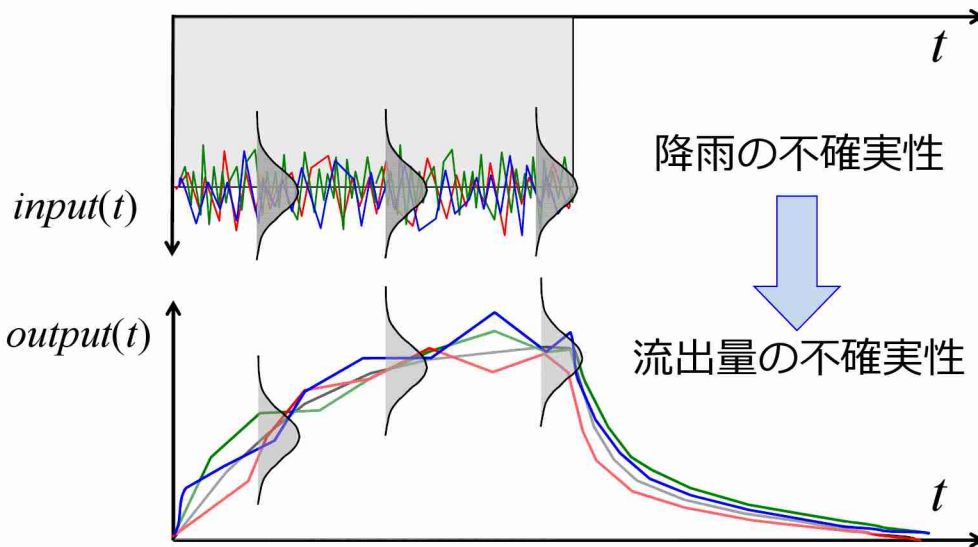
国土交通技術行政の基本政策懇談会

降雨流出の水文統計と計画流量

中央大学教授 山田正

2018年8月1日

雨の不確実性と流量の不確実性 uncertainty of rainfall and discharge

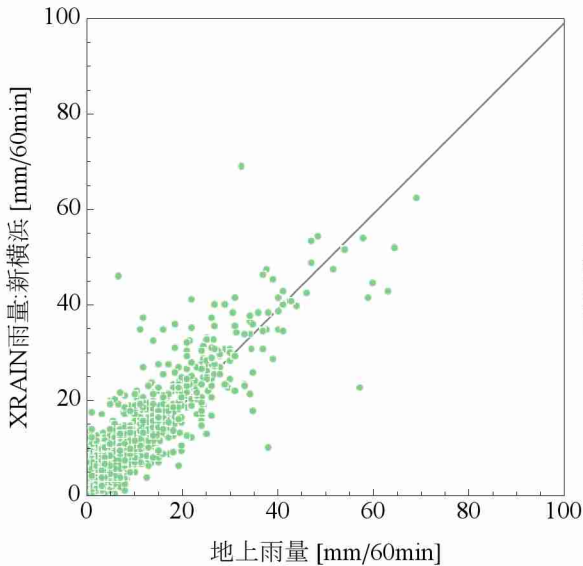


降雨の不確実性がもたらす流出量の不確実性を求めたい！

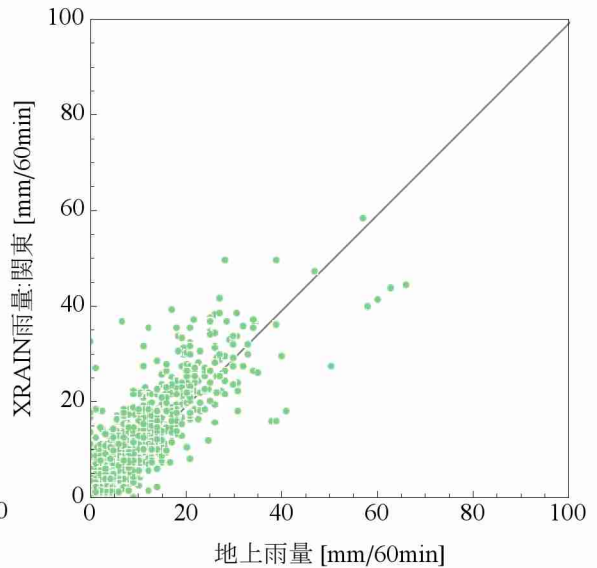
降雨の不確実性(時間分布, 空間分布)

uncertainty of rainfall

60分雨量レーダ:新横浜, 半径0~60kmの精度

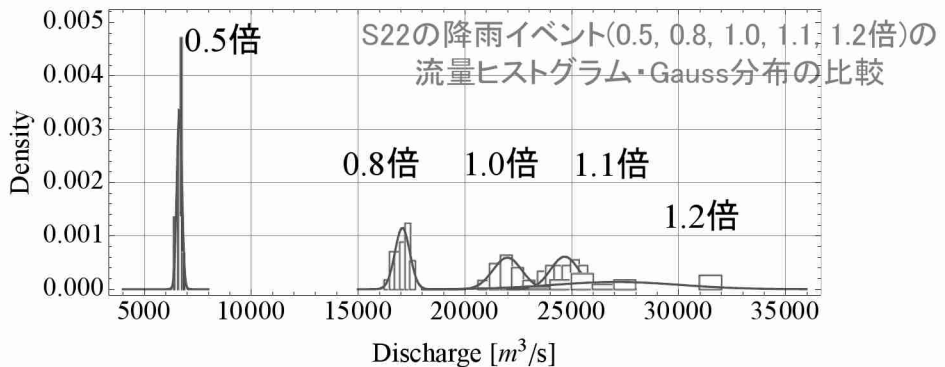
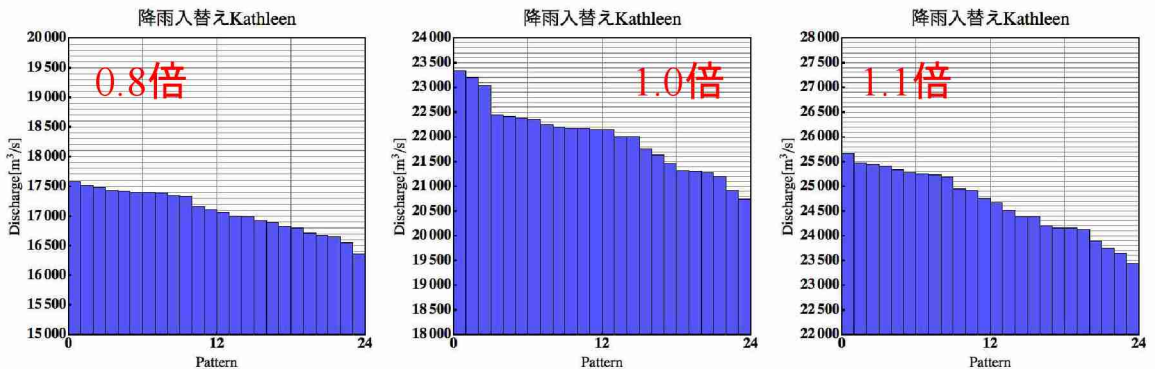


60分雨量レーダ:東京(関東), 半径0~60kmの精度



降雨の不確実性(空間分布)

uncertainty of rainfall



降雨の不確実性(時間分布)

uncertainty of rainfall

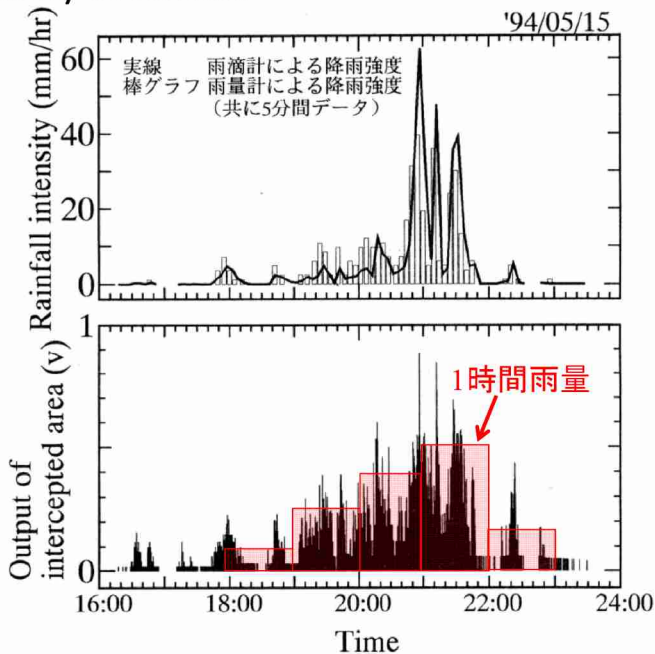


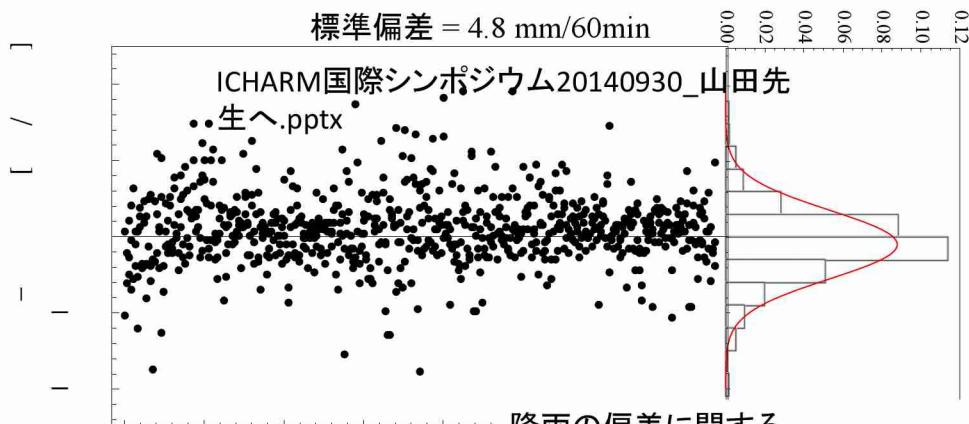
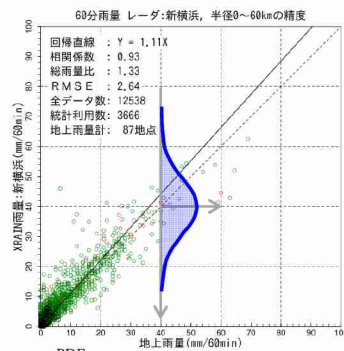
図 レーザ一雨滴計による雨滴及び雪粒子の観測例

山田ら(1996.5): 新しいタイプのレーザ一雨滴計の開発とこれを用いた降雨の雨滴粒径分布の観測, 土木学会論文集No.539

降雨の不確実性(時間分布)

uncertainty of rainfall

- ・降雨の空間分布, 時間分布に起因する不確実性
- ・観測誤差に起因する不確実性



降雨の偏差に関する
確率密度関数は**正規分布**に近似できる

降雨流出計算の基礎式

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{連続式: } \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = r_e(t) \\ \text{運動則: } v = \alpha h^m, \quad q = vh = \alpha h^{m+1} \end{array} \right.$$

$$\alpha = \frac{k_j}{D^{m+1} w^m} \quad \beta = \frac{m}{m+1}$$

$$a_0 = \frac{\beta}{1-\beta} \left(\frac{\alpha}{L} \right)^{1-\beta}$$

v : 断面平均流速[mm/h], h : 湛水深[mm]
 q : 単位幅流量[mm²/h], q_* : 流出高[mm/h]
 α, m : 流出パラメータ

集中化

「直接流出は河道近傍のみから発生する」とすると、
 流出量は斜面長に比例すると考えることができる。

$$q(x, t) \cong xq_*(t)$$

斜面長 L の末端で考え $x=L$ とすると

$$\frac{dq_*(t)}{dt} = a_0 q_*(t)^\beta \{r_e(t) - q_*(t)\} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dq}{dt} = a q^b \{r - q\}$$

降雨流出の基礎式は貯留関数法と本質的に同じである。

確率微分方程式(SDE)

Brown運動を記述したEinsteinの論文が始まり。同時期にSmoluchowskiもBrown運動に関する論文を発表。

LangevinがBrown運動を確率微分方程式の形で示した。

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha(x(t)) + R(t) \quad \rightarrow \quad \text{Fokker-Planck方程式}$$

伊藤清によって数学的基礎付けが行われた(1942)

伊藤の確率微分方程式

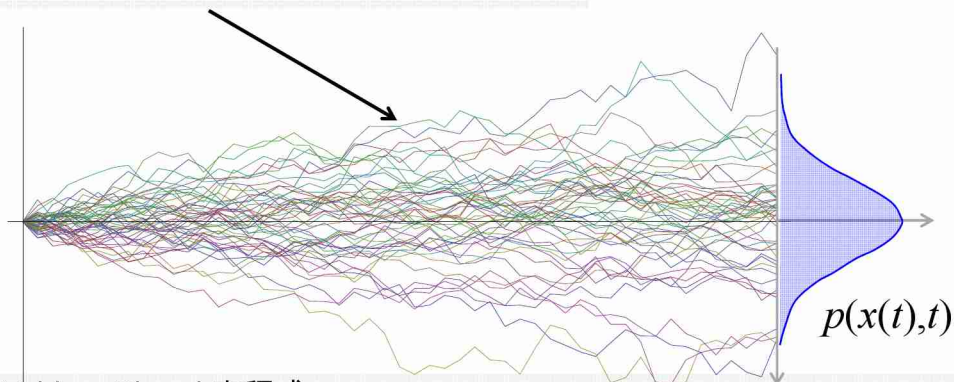
$$dx(t) = y(x(t), t)dt + z(x(t), t)dw(t)$$

$dw(t)$ はWiener過程 $N(0,1)$ に従う

確率微分方程式とFokker-Planck方程式の関係

伊藤の確率微分方程式

$$dx(t) = y(x(t), t)dt + z(x(t), t)dw(t)$$

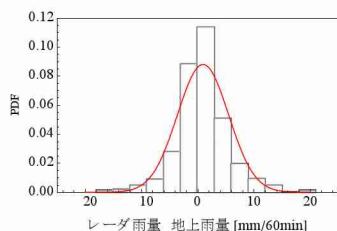
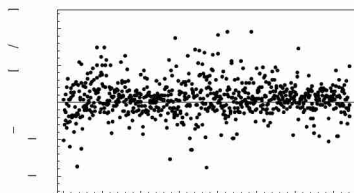


Fokker-Planck方程式

$$\frac{\partial p(x(t), t)}{\partial t} = -\frac{\partial y(x(t), t)p(x(t), t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z^2(x(t), t)p(x(t), t)}{\partial x^2}$$

伊藤の確率微分方程式とFokker-Planck方程式が数学的に等価であることは確率微分方程式論で明らかにされている。

降雨流出の基礎式と確率微分方程式の関係



$$r(t) = \bar{r}(t) + r'(t)$$

$$dq = aq^b \{\bar{r} - q\} dt + aq^b r' dt$$

- ・雨の偏差は $N(0, \sigma^2)$ のGauss分布になる
- ・G. I. Taylorの拡散理論を適用する

$$dq = \underbrace{aq^b \{\bar{r} - q\}}_{y(x, t)} dt + \underbrace{aq^b \sigma \sqrt{T_L}}_{z(x, t)} dw$$

降雨流出の基礎式が伊藤の確率微分方程式と同じ形になった！！

[参考]

伊藤の確率微分方程式:

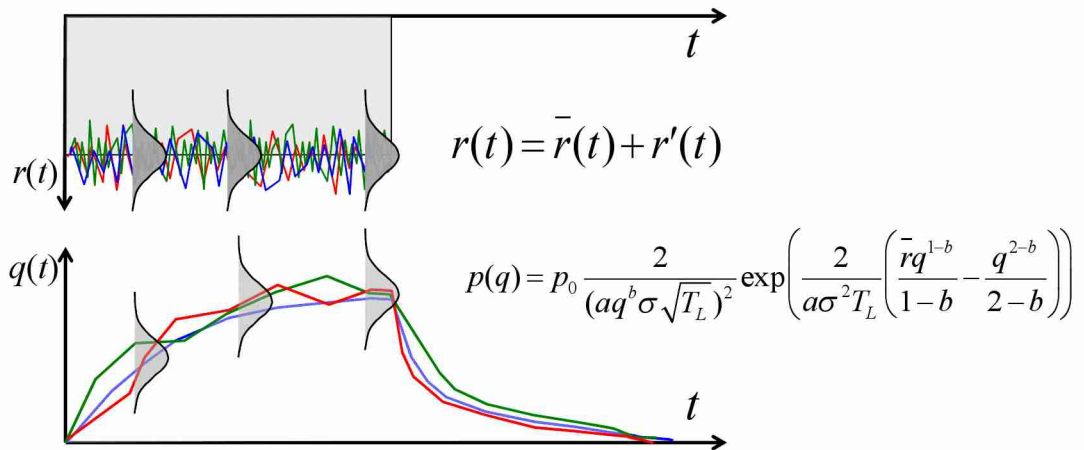
$$dx = y(x, t)dt + z(x, t)dw$$

降雨流出の基礎式と確率微分方程式の関係

Fokker-Planck方程式:

$$\frac{\partial p(q)}{\partial t} + \frac{\partial aq^b \{\bar{r} - q\} p(q)}{\partial q} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (aq^b \sigma)^2 p(q)}{\partial q^2}$$

確率微分方程式: $dq = aq^b \{\bar{r} - q\} dt + aq^b \sigma \sqrt{T_L} dw$



流出高の分布がわかったとき、 流量・水位の分布はどうなるのか？

流出高の確率密度関数

$$p(q) = p_0 \frac{2}{(aq^b \sigma \sqrt{T_L})^2} \exp\left(\frac{2}{a\sigma^2 T_L} \left(\frac{\bar{r}q^{1-b}}{1-b} - \frac{q^{2-b}}{2-b}\right)\right)$$

水位の確率密度関数

$$p_h(h) = p_Q(g^{-1}(h)) \frac{dg^{-1}(h)}{dh}$$

$$f_y(y) = f_x(g^{-1}(y)) \frac{dg^{-1}(y)}{dy}$$

$$y = g(x) \longrightarrow$$

$$x = g^{-1}(y) \longrightarrow$$

$$\frac{dg^{-1}(y)}{dy} \longrightarrow$$

?

流量の確率密度関数

$$p_Q(Q) = p_{q^*}(g^{-1}(Q)) \frac{dg^{-1}(Q)}{dQ}$$

流出高, 流量, 水位の関係式がわかれば良い!

つまり, 各々の関係式: $Q=g(q_*)$ や $h=g(Q)$ がわかれば良い!

河道の効果は無視できるスケールの流域を想定すると,

$$Q = \frac{1}{3.6} A q_* = g(q_*)$$

流出高と流量の関係

矩形断面水路で等流状態を考えると,

$$Q = A \times q_* = B \frac{1}{n} \sqrt{i} \times h^{\frac{5}{3}}$$

$$Q = ah^{\frac{5}{3}} \rightarrow h = \left(\frac{Q}{a} \right)^{\frac{3}{5}} = CQ^{\frac{3}{5}} \quad \left(C = \left(\frac{1}{a} \right)^{\frac{3}{5}}, a = B \frac{1}{n} \sqrt{i} \right)$$

$$h = CQ^{\frac{3}{5}} \quad Q = \left(\frac{h}{C} \right)^{\frac{5}{3}} \rightarrow \frac{dQ}{dh} = \frac{5}{3} C^{-\frac{3}{5}} h^{\frac{2}{3}}$$

流量と水位の関係

流域面積: A [km^2], 川幅: B [m], マニングの粗度係数: n , 河床勾配: i

流出高の分布がわかったとき, 流量・水位の分布はどうなるのか?

流出高の確率密度関数

$$p(q) = p_0 \frac{2}{(aq^b \sigma \sqrt{T_L})^2} \exp\left(\frac{2}{a\sigma^2 T_L} \left(\frac{\bar{r}q^{1-b}}{1-b} - \frac{q^{2-b}}{2-b} \right) \right)$$

水位の確率密度関数

$$p_h(h) = p_Q \left(\left(\frac{h}{C} \right)^{\frac{5}{3}} \right) \frac{5}{3} C^{-\frac{3}{5}} h^{\frac{2}{3}}$$



$$Q = \frac{1}{3.6} A q_* = g(q_*)$$

$$f_y(y) = f_x(g^{-1}(y)) \frac{dg^{-1}(y)}{dy}$$

$$y = g(x) \rightarrow$$

$$x = g^{-1}(y) \rightarrow$$

$$\frac{dg^{-1}(y)}{dy} \rightarrow$$

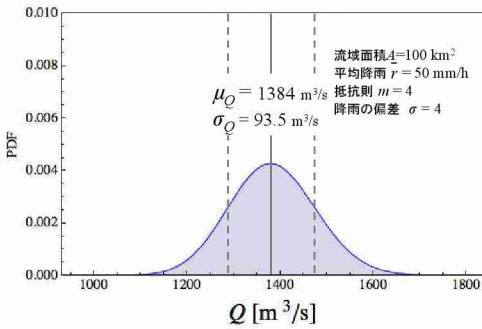
?

流量の確率密度関数

$$p_Q(Q) = p_{q_*} \left(\frac{3.6Q}{A} \right) \frac{3.6}{A}$$

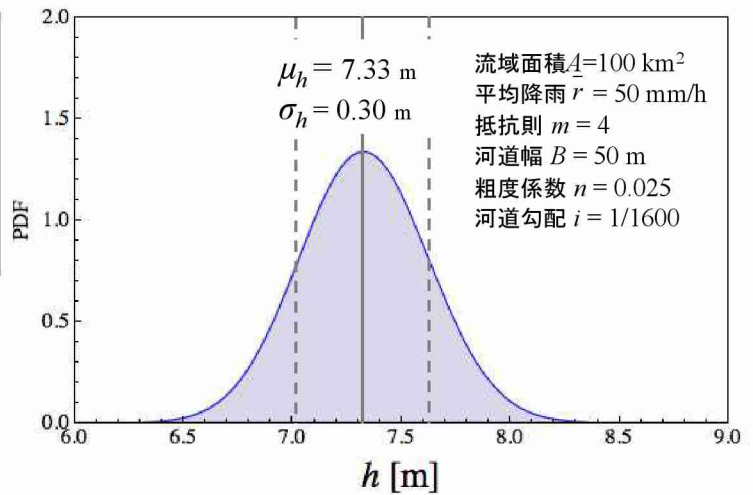
$$h = CQ^{\frac{3}{5}} = g(Q)$$

流量の分布がわかったとき、 水位の分布はどうなるのか？



流量の不確実性

$$p_Q(Q) = p_{q_s} \left(\frac{3.6Q}{A} \right) \frac{3.6}{A}$$

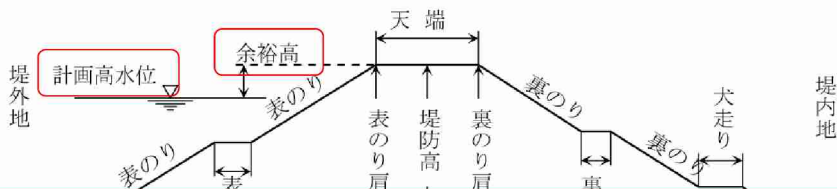


これが**水位の不確実性**

$$p_h(h) = p_Q \left(\left(\frac{h}{C} \right)^3 \right) \frac{5}{3} C^{-\frac{3}{5}} h^{\frac{2}{5}}$$

堤防の余裕高の理論的解釈

堤防の各部の名称



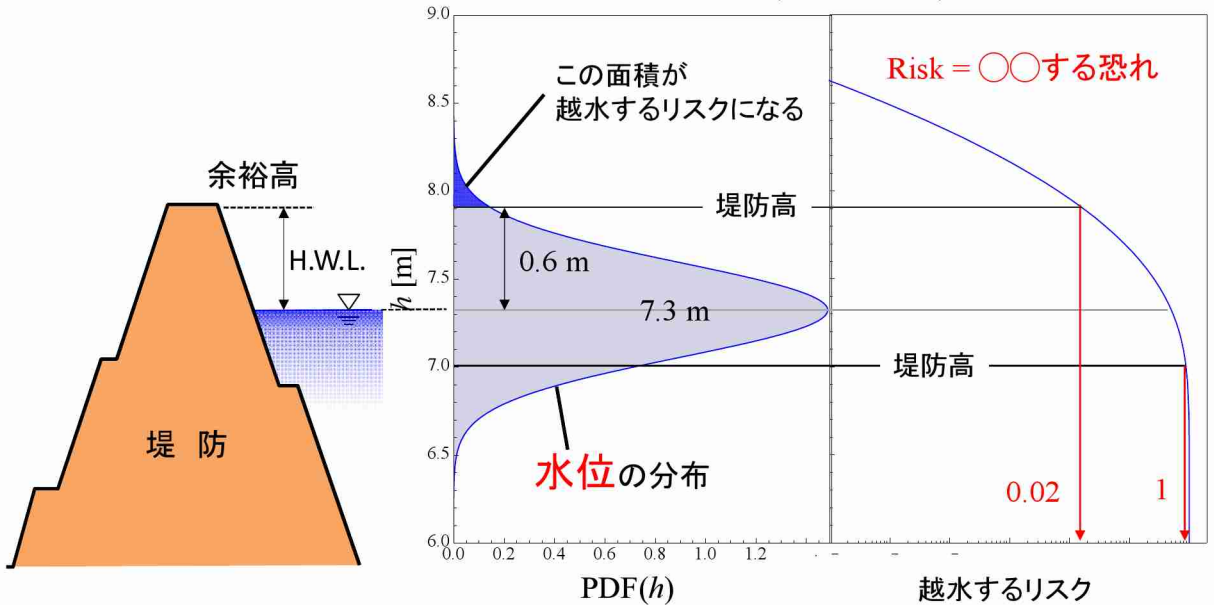
余裕高: 堤防に必要とされる高さの余裕
吹き寄せ, 波(風浪, うねり), 跳水, 流木の漂着, 水防, 右左岸の水位差等…

この他に、**雨による不確実性が入る**のではないかと！

200 未満		0.6
200 以上	500 未満	0.8
500 以上	2,000 未満	1.0
2,000 以上	5,000 未満	1.2
5,000 以上	10,000 未満	1.5
10,000 以上		2.0

堤防の余裕高の理論的解釈

$$\bar{r}=50 \text{ mm/h}, \sigma = 4 \text{ mm/h}, m=4$$



余裕高：吹き寄せ、波(風浪,うねり)、跳水、流木の漂着、右左岸の水位差等…

+ 水位の分布(不確実性)

[参考]

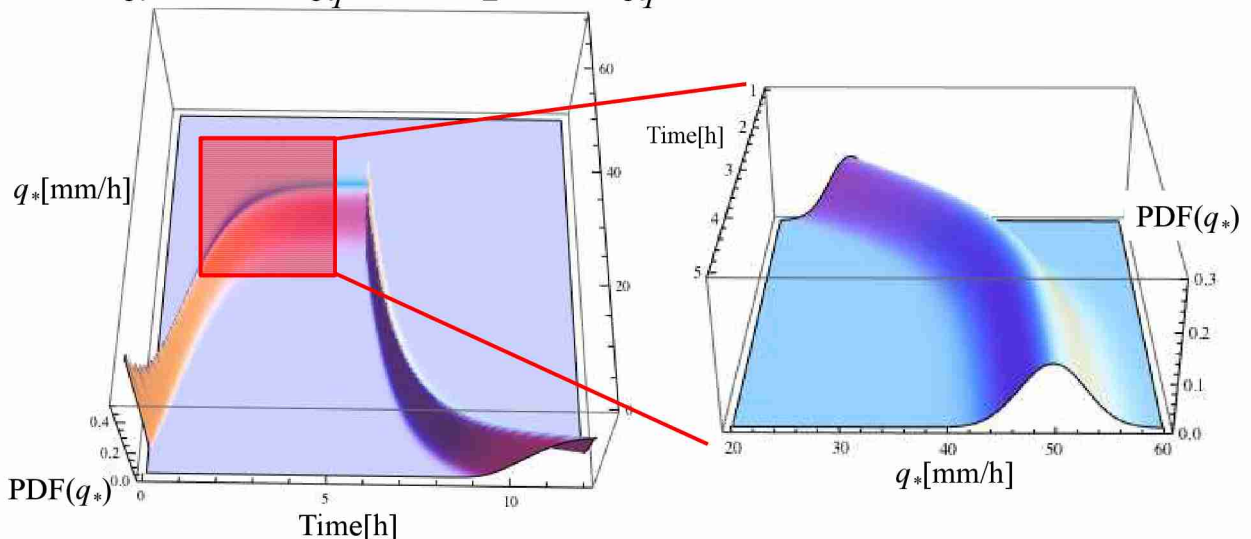
交通事故で死亡：1/1万

飛行機死亡事故：1/50万

薬剤死亡リスク：1/200万

流出高の確率密度関数(非定常)

$$\frac{\partial p(q)}{\partial t} + \frac{\partial aq^b \{\bar{r} - q\} p(q)}{\partial q} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (aq^b \sigma \sqrt{T_L})^2 p(q)}{\partial q^2}$$



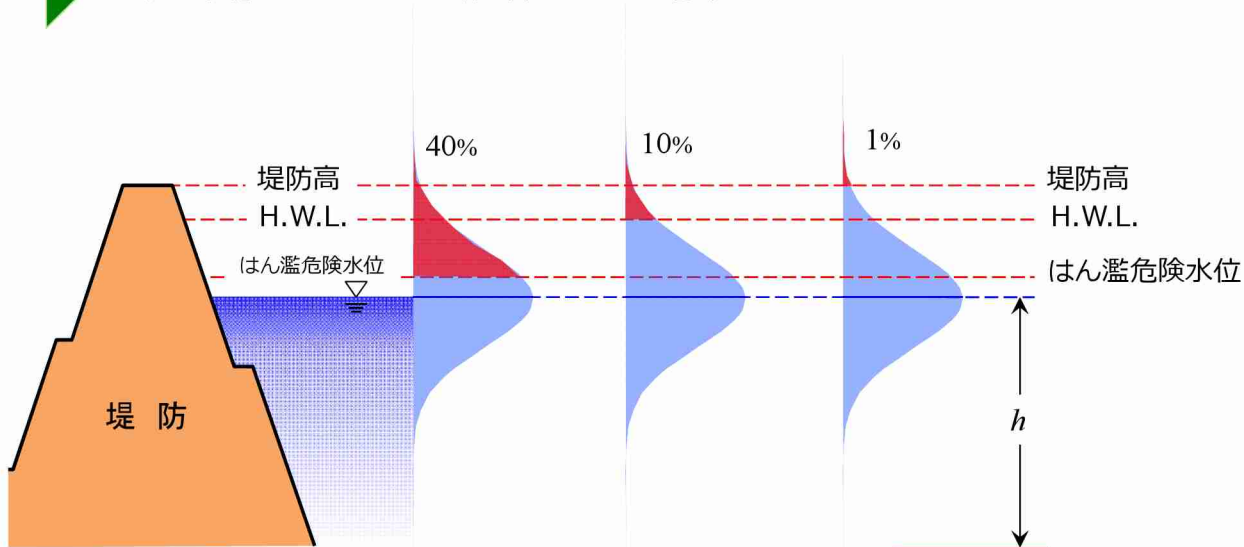
Fokker-Planck方程式：

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial g(x,t)p(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma^2(x,t)p(x,t)}{\partial x^2}$$

$$dq = aq^b \{\bar{r} - q\} dt + aq^b \sigma \sqrt{T_L} dw$$

$$g(q) = aq^b \{\bar{r} - q\} \quad , \quad f(q) = aq^b \sigma \sqrt{T_L}$$

避難の意思決定の考え方1



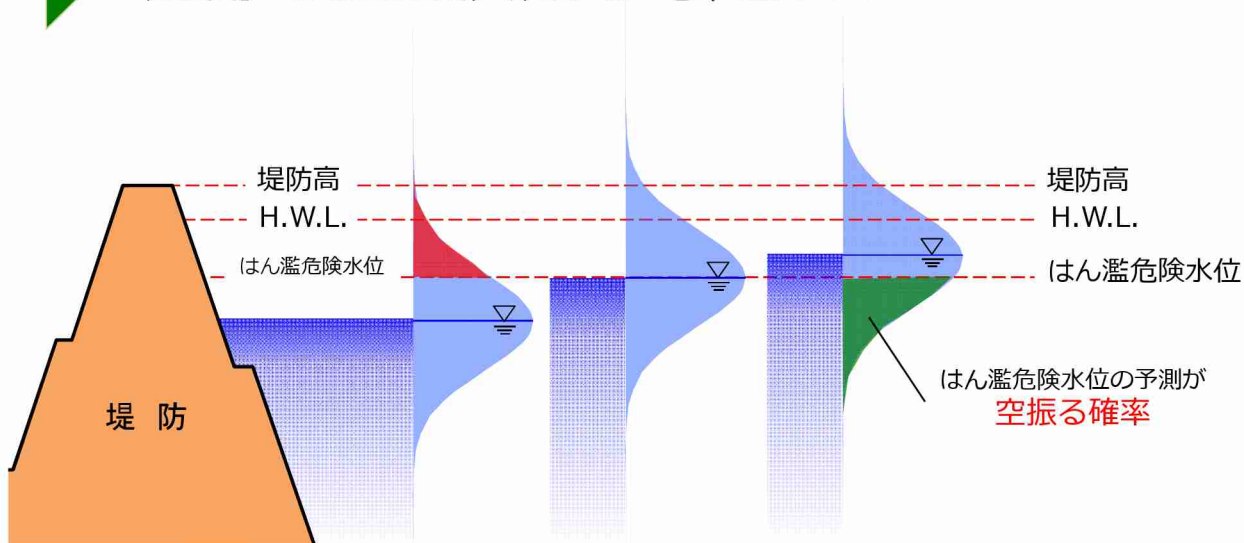
例えば

ある求められた水位 h の時点で、
避難判断の基準となる水位
(例えば、はん濫危険水位など)
を越える確率を求めることができる。

[参考]

交通事故で死亡：1/1万
飛行機死亡事故：1/50万
薬剤死亡リスク：1/200万

避難の意思決定の考え方2



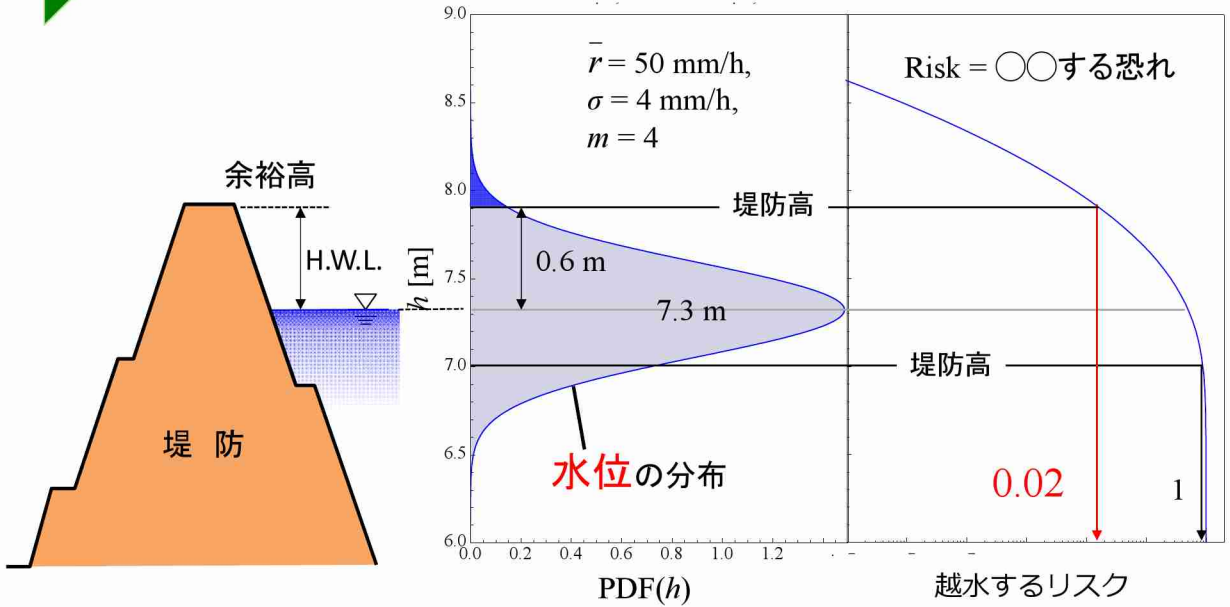
例えば

ある求められた水位 h の時点で、その値が
避難判断の基準となる水位を越えていた場合、
基準となる水位を越えない確率（空振る確率）
を求めることができる。

[参考]

交通事故で死亡：1/1万
飛行機死亡事故：1/50万
薬剤死亡リスク：1/200万

堤防の余裕高の理論的解釈



H.W.L.が100年確率で定められている場合、

$0.01 \times 0.02 = 0.0002$ となる。

これが1年間に越水するリスクである！

このリスクが許容できるか？！

[参考]

交通事故で死亡：1/1万

飛行機死亡事故：1/50万

薬剤死亡リスク：1/200万

堤防の安定性計算 -修正フェレニウス法

- フェレニウス法はフェレニウスにより1927年に提案されたもので、簡便分割法やスウェーデン法とも呼ばれる。

$$FS = \frac{\sum [c' \cdot l + (W - u \cdot l) \tan \phi']}{\sum W \cdot \sin \alpha}$$

- フェレニウス法における間隙水圧はすべり面に対して垂直に作用するものとして扱われている。すべり面勾配が大きくなると間隙水圧が過剰に算出される。このような不具合を解消するため、フェレニウス法を修正した。

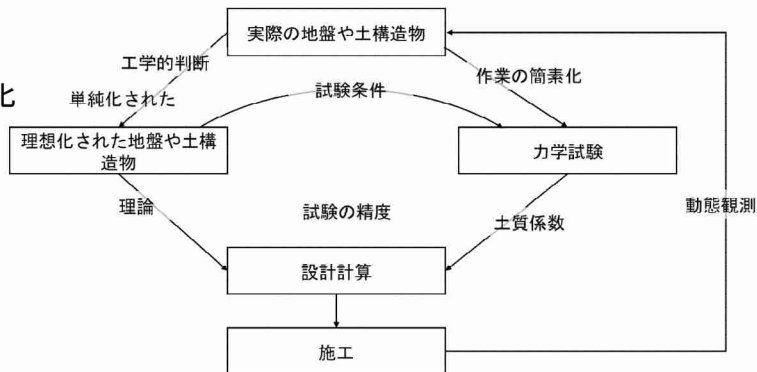
$$FS = \frac{\sum [c' \cdot l + (W - u \cdot b) \cos \alpha \cdot \tan \phi']}{\sum W \cdot \sin \alpha}$$

F_S : 安全率
 c' : 粘着力(kN/m² (tf/m²))
 ϕ' : 内部摩擦角(度)
 l : スライスで切られたすべり面の長さ(m)
 W : スライスの全重量(kN/m² (tf/m²))
 u : 間隙水圧(kN/m² (tf/m²))
 b : スライスの幅(m)
 α : スライスで切られたすべり面の中点とすべり面の中心を結ぶ直線と鉛直線のなす角(度)

土質の不確実性

試験結果のバラツキの原因

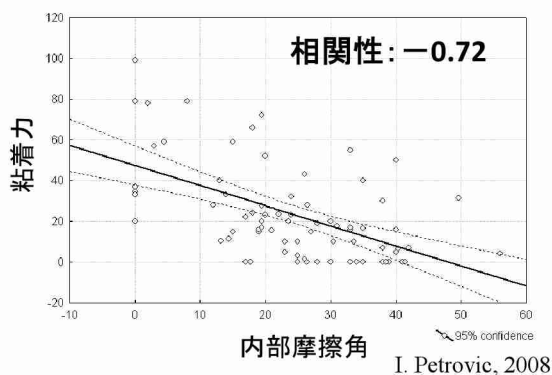
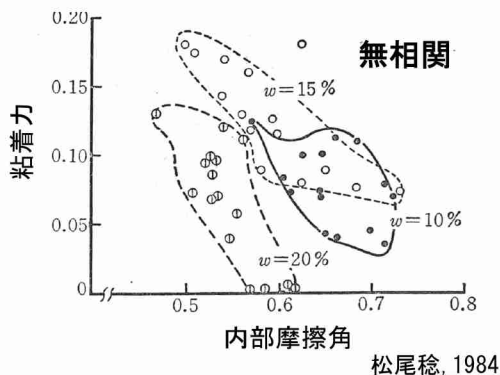
- 地盤の性質：
 - ・ 不均一性
 - ・ 雨水や地下水位の変化
 - ・ その他
- 技術の問題：
 - ・ サンプラーの型式
 - ・ サンプリングの技術
 - ・ 試験者の技術
 - ・ 試験の方法
 - ・ その他



出典：松尾稔，1984，地盤工学—信頼性設計の理念と実際

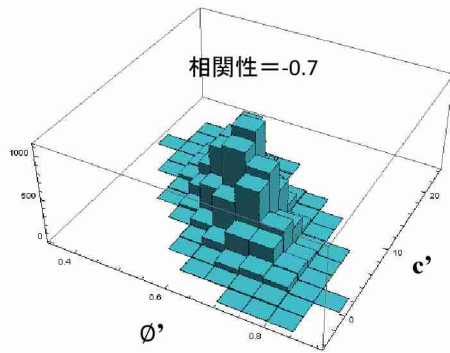
土質の不確実性

- ・ 土質諸係数を確率，統計の立場から設計に適用しようとする場合には，諸係数の相関性を検討しておく必要がある。



堤防の破壊確率

$$FS = \frac{\sum [c' \cdot l + (W - u \cdot b) \cos \alpha \cdot \tan \phi']}{\sum W \cdot \sin \alpha}$$



FS : 安全率
 c' : 粘着力(kN/m^2 (tf/m^2))
 ϕ' : 内部摩擦角(度)
 l : スライスで切られたすべり面の長さ(m)
 W : スライスの全重量(kN/m^2 (tf/m^2))
 u : 間隙水圧(kN/m^2 (tf/m^2))
 b : スライスの幅(m)
 α : スライスで切られたすべり面の中点とすべり面の中心を結ぶ直線と鉛直線のなす角(度)

粘着力
内部摩擦角
両者の相関性

土質の不確実性

計算条件

堤防高: 7.5m

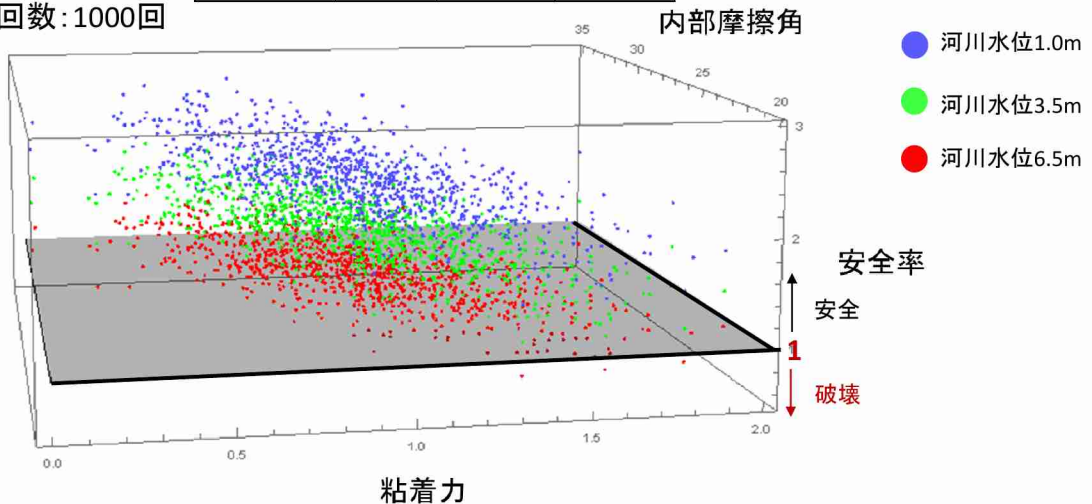
天端幅: 4m

堤防勾配: 1:4

試行回数: 1000回

土質係数

	値	変動係数	相関係数
粘着力	1 kN/m^2	13%	-0.7
内部摩擦角	27.5°	40%	



土質の不確実性

計算条件

堤防高: 7.5m

天端幅: 4m

堤防勾配: 1:4

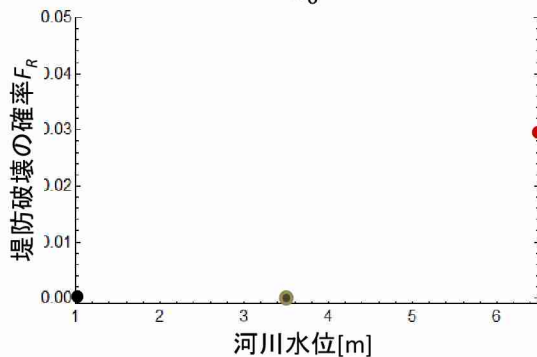
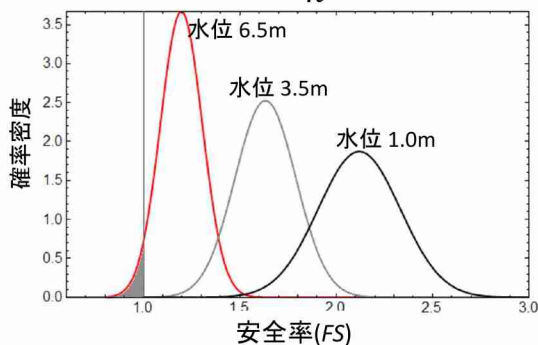
試行回数: 1000回

土質係数

	値	変動係数	相関係数
粘着力	1 kN/m ²	13%	-0.7
内部摩擦角	27.5°	40%	

F_R : 破壊確率
 n : 破堤とみなされた回数
 N : 試行回数

$$F_R(h) = \frac{n_h}{N_h} \xrightarrow{\text{河川水位}(h) \rightarrow \text{外力}(s)} P_f = P[R \leq s] = \int_0^s f_R(r) dr = F_R(s)$$



土質の不確実性

決定論的な方法

外力- 降雨流出モデルを計算
 耐力- 堤防の安定性計算

不確実性の定義

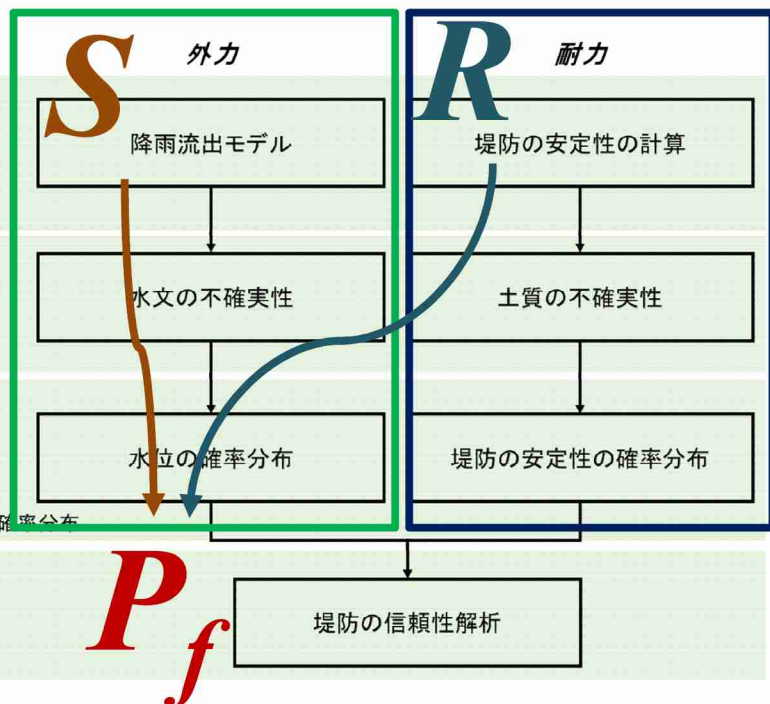
外力- 水文の不確実性
 耐力- 土質の不確実性

確率過程論

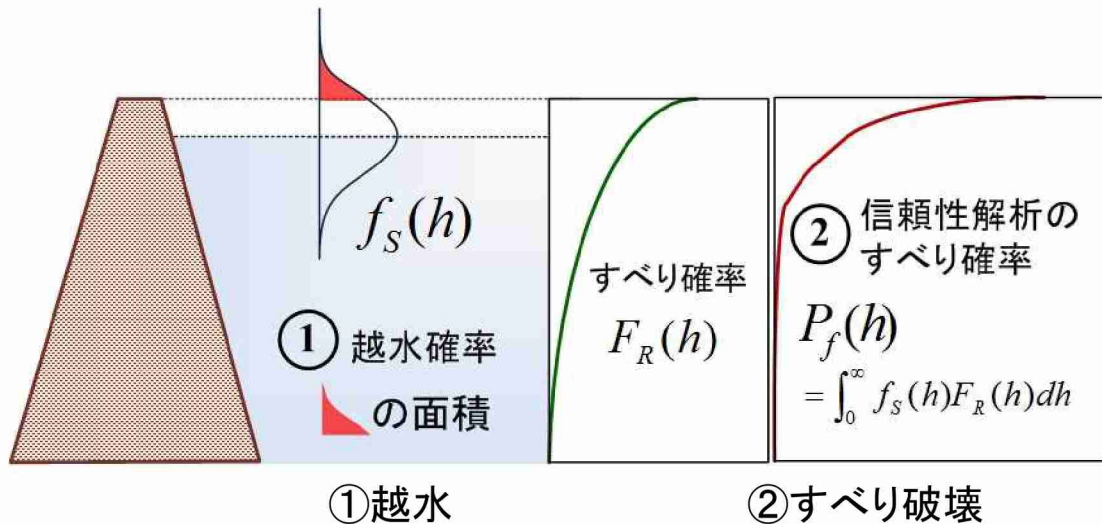
外力- 確率過程論に基づいた河川水位の確率分布
 耐力- 土質の不確実性に基づいた堤防の安全性の確率分布

信頼性分析

堤防の信頼性解析

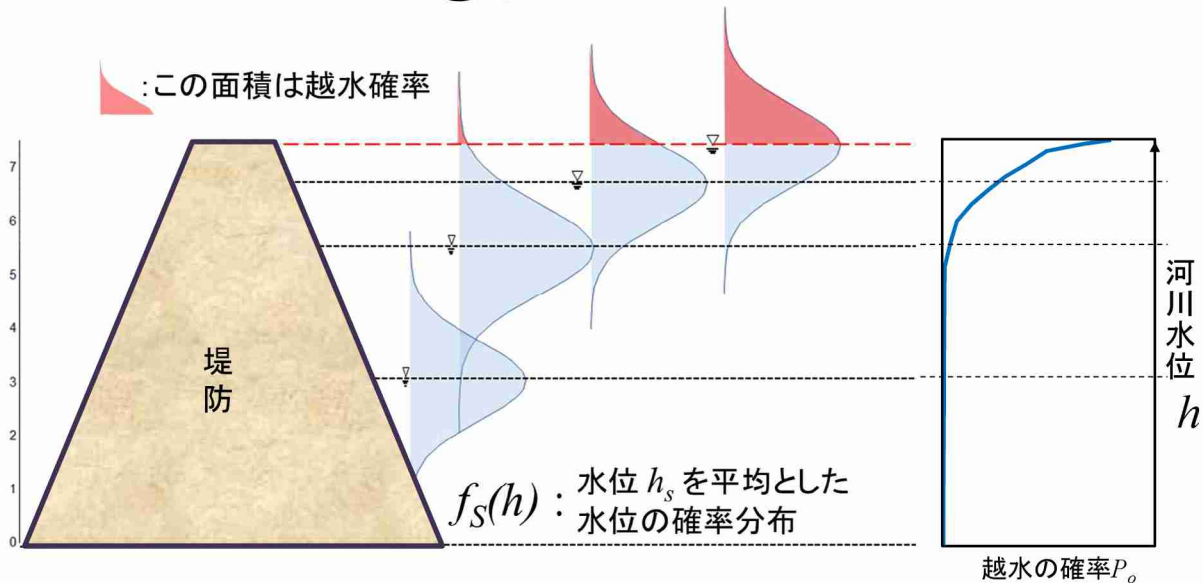


信頼性解析



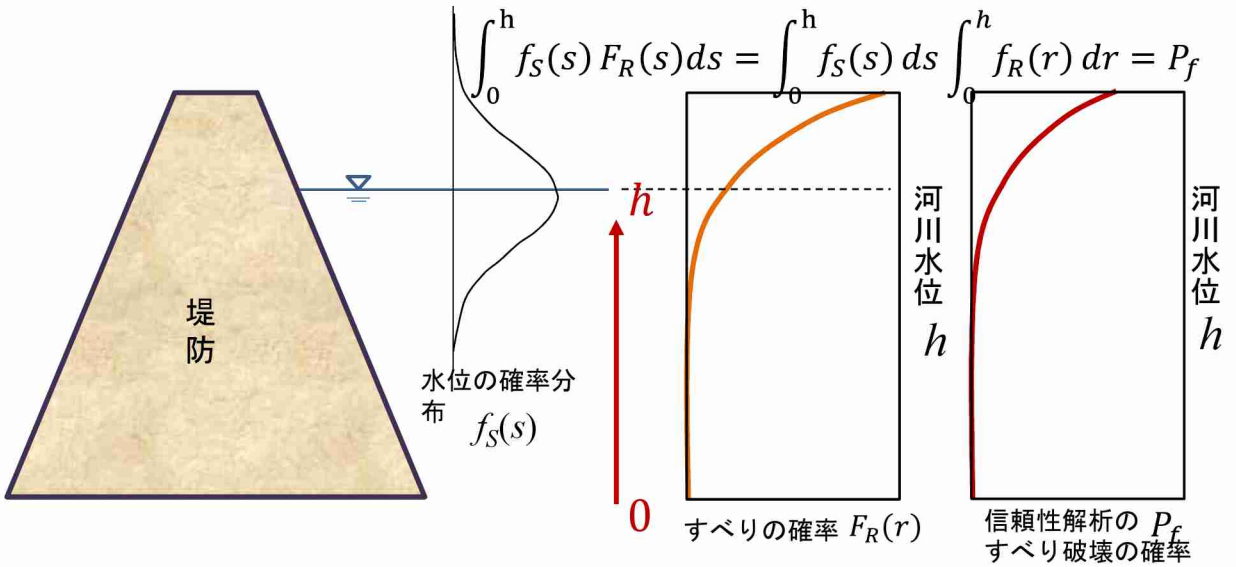
信頼性解析

①越水確率

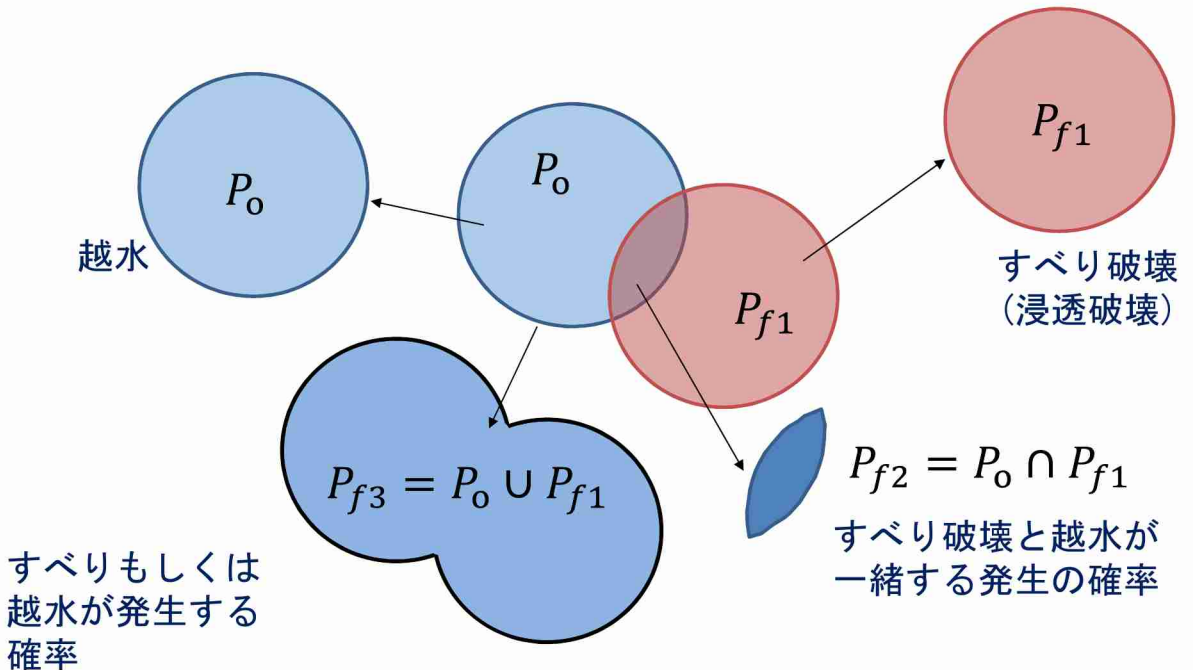


信頼性解析

②すべり破壊の確率



堤防破壊の信頼性解析



計算の仮定

- 堤防内の浸潤面と河川水位は同じ水平面を仮定する.
- 降雨から堤防に直接の浸透は無視する.
- 堤防の破壊は越水と浸透破壊, 二種類を計算する.
- 堤防の浸透破壊は円弧すべり計算法を用いて行う.
- すべり破壊は安全係数(FS)が1.0より小さいとき, 破壊を定義する.
- 計算回数は100,000回.
- 土質のバラツキは以下の通りとする

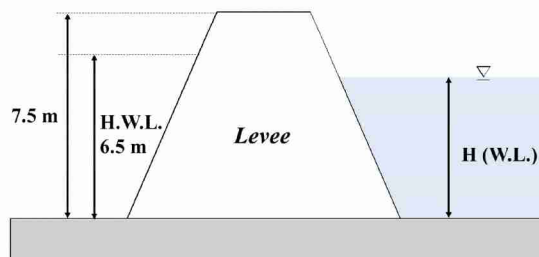
	粘着力 c'	内部摩擦角 ϕ'	相関係数
変動係数(%)	40	13	-0.72

計算条件

- 降雨流出の計算条件

$A=100 [km^2]$; $r=50 [mm/h]$; $t=5 [h]$; $ks=0.02 [cms]$; $L=30000 [mm]$; $m=4$;
 $i=15 [^\circ]$; $D=200 [mm]$; $w=0.42$; $\sigma=4 [mm]$

- 堤防の勾配は
 - 1:3、1:4、1:5、1:6
- 土質の条件は $r = 18 kN/m^2$



計算結果 砂質土ケース1

S1

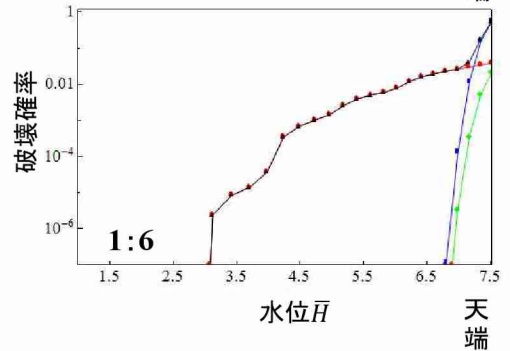
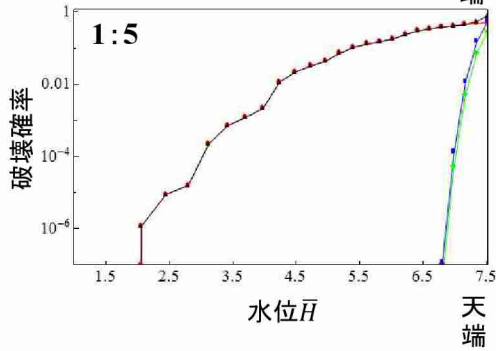
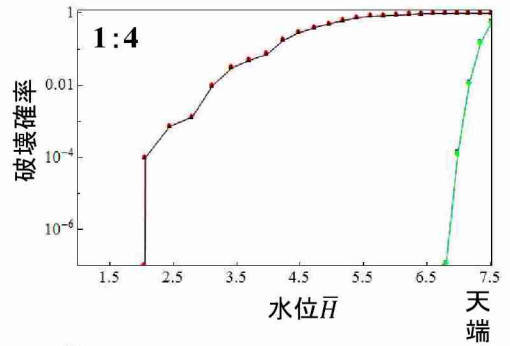
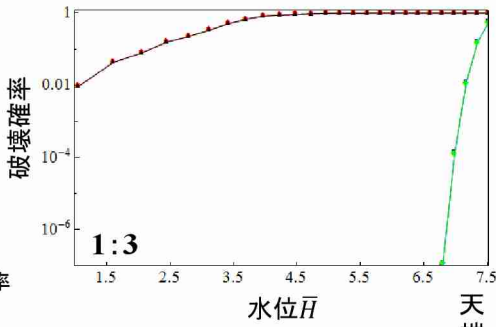
$$c' = 1 \text{ kN/m}^2$$

$$\phi' = 20^\circ$$

 P_{β} すべり破壊する確率

 P_o 越水確率

 P_{β} すべり破壊と越水が一緒する発生の確率

 P_{β} すべりもしくは越水が発生する確率


計算結果 砂質土ケース2

S3

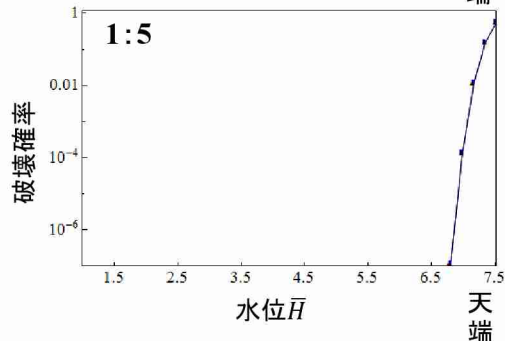
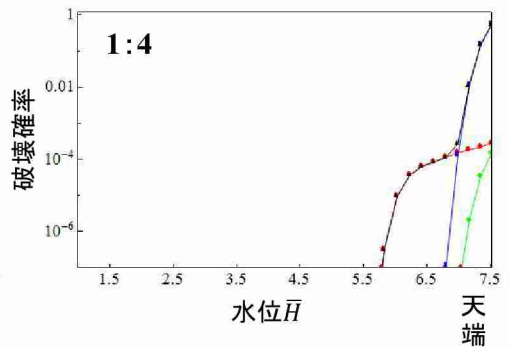
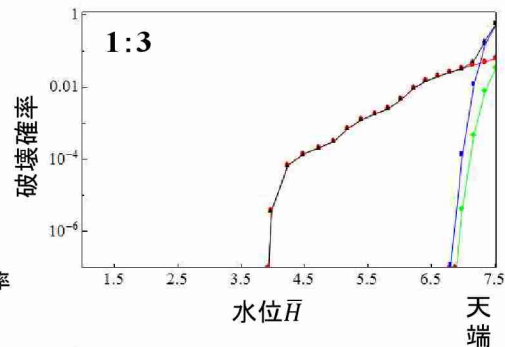
$$c' = 1 \text{ kN/m}^2$$

$$\phi' = 35^\circ$$

 P_{β} すべり破壊する確率

 P_o 越水確率

 P_{β} すべり破壊と越水が一緒する発生の確率

 P_{β} すべりもしくは越水が発生する確率


計算結果 粘土ケース1

C1

$$c' = 10 \text{ kN/m}^2$$

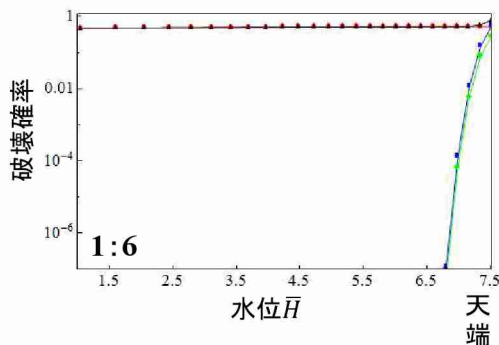
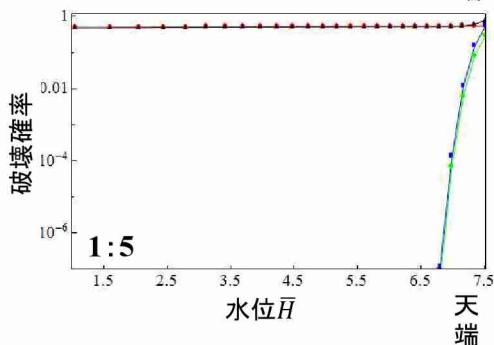
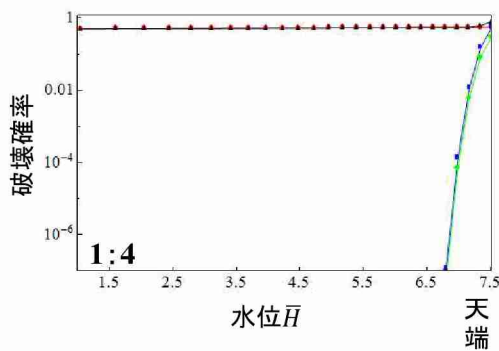
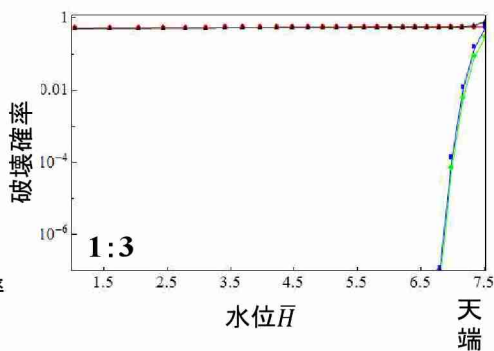
$$\phi' = 1^\circ$$

P_{β} すべり破壊する確率

P_o 越水確率

P_{β} すべり破壊と越水が一緒する発生の確率

P_{β} すべりもしくは越水が発生する確率



計算結果 粘土ケース2

C3

$$c' = 60 \text{ kN/m}^2$$

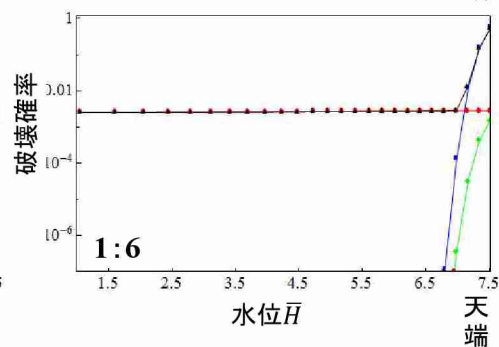
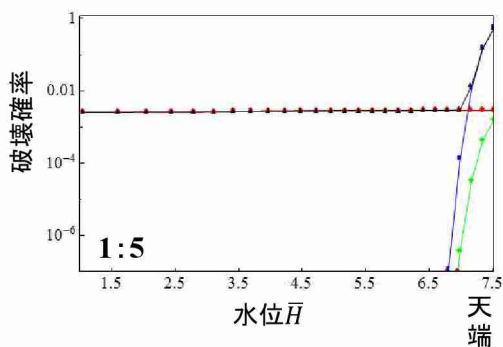
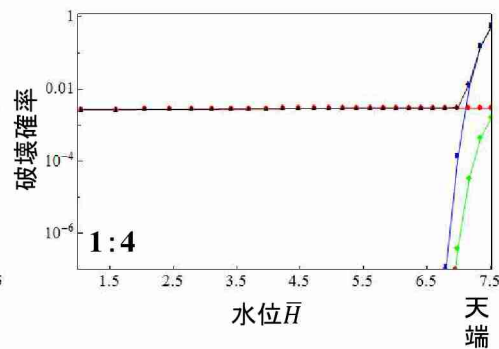
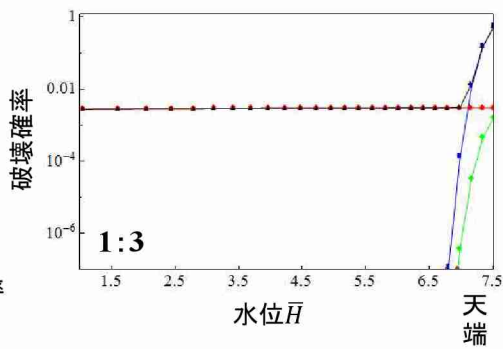
$$\phi' = 1^\circ$$

P_{β} すべり破壊する確率

P_o 越水確率

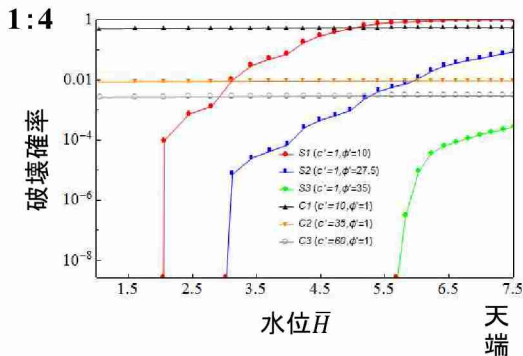
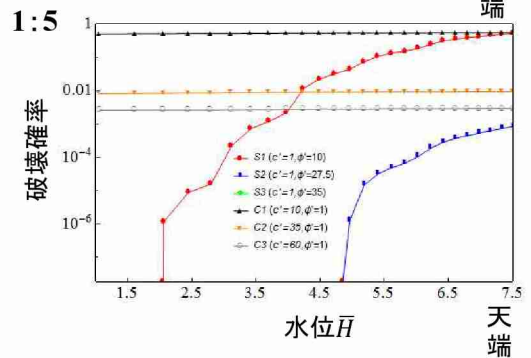
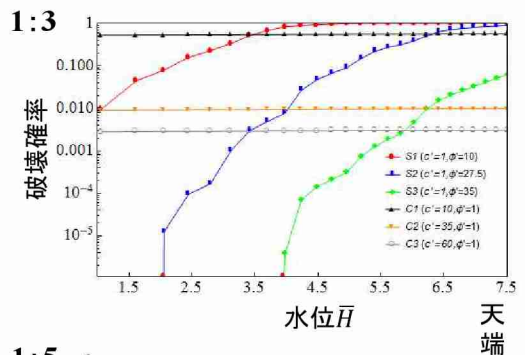
P_{β} すべり破壊と越水が一緒する発生の確率

P_{β} すべりもしくは越水が発生する確率



計算結果

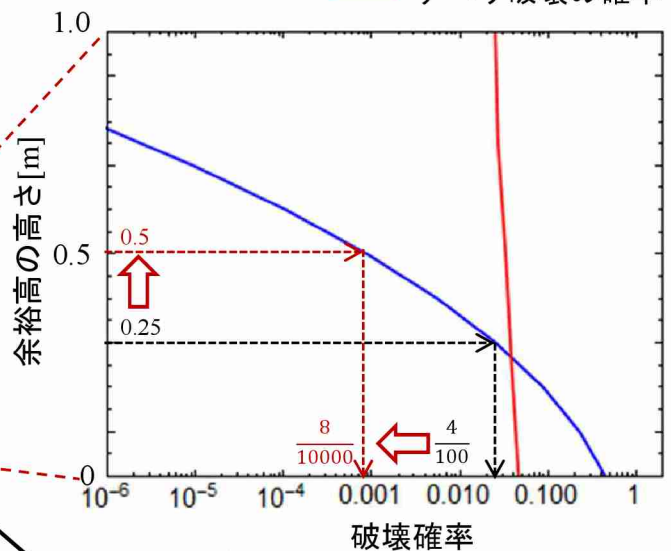
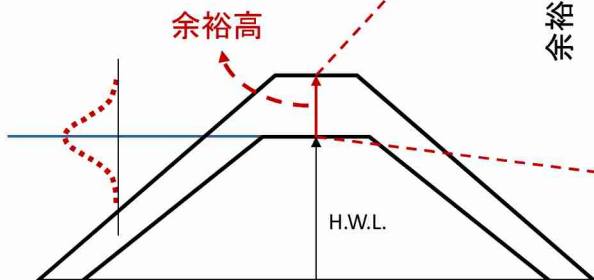
Soil type	Scenario	Cohesion c' [kN/m ²]	Friction angle ϕ' [°]
Sandy soil	S-1	1	20
	S-2	1	27.5
	S-3	1	35
Clay soil	C-1	10	1
	C-2	35	1
	C-3	60	1



余裕高の意味

計算条件：

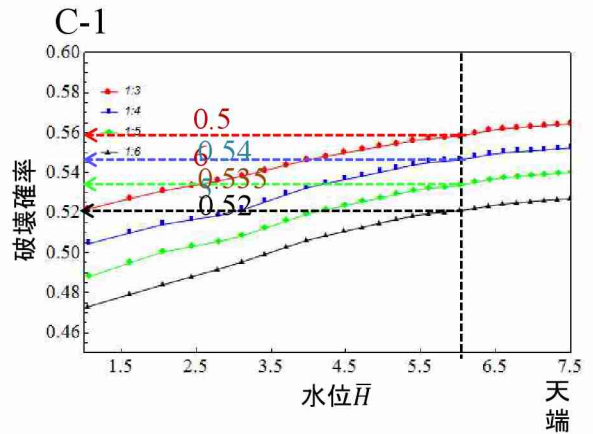
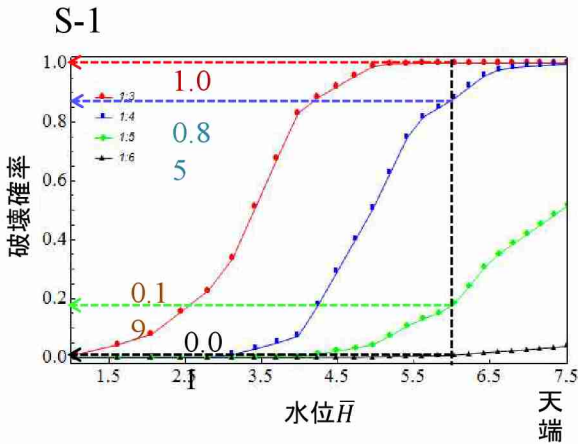
- S-1 ($c'=1 \text{ kN/m}^2$ $\phi'=20^\circ$)
- HWLは6.5m
- 計算水位は6.5m
- 余裕高は0~1.0m



勾配の影響

計算条件

- S-1($c'=1 \text{ kN/m}^2$ $\phi'=20^\circ$)
- C-1($c'=10 \text{ kN/m}^2$ $\phi'=1^\circ$)
- 勾配は1:3~1:6



まとめ

降雨流出の基礎式と伊藤の確率微分方程式の関係から
雨の不確実性(標準偏差) σ に対する流量の不確実性 $p(Q)$,
及び水位の不確実性 $p(h)$ を数学的に厳密に示した.

降雨流出過程の非線形性が強くなるのに従って,
流量,水位の分散は大きくなる.

流量, 水位の分散は降雨の平均値 \bar{r} も影響し,
降雨の平均値が大きくなるに従って, 流量, 水位の
分散は大きくなる.

河川堤防を越水する確率を理論的に説明した. その解釈には,
降雨の不確実性によって生じる水位の分布が含まれる可能性を
示した. 同時に, 他のリスクと比較できるようになる事を示した